PART2 楕円

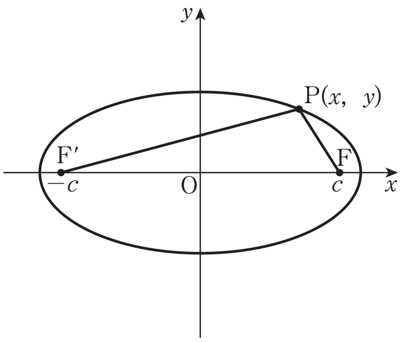
要点整理と公式

要点 ① 楕円の方程式

「楕円の定義」…2 定点 F，F′ からの距離の和が一定である点の軌跡。

2 点 F，F′ を「　　　」という。

2 点 F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式について
（ただし，$a>c>0$ とする）



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2(x+c)^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \qquad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a>c>0$ であるから，$\sqrt{a^2-c^2}=b\ (>0)$ とおくと

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

よって $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（標準形）　　また $c=\sqrt{a^2-b^2}$

2 点 F，F′ を焦点とする楕円において，線分 FF′ の中点を楕円の「　　」という。
また

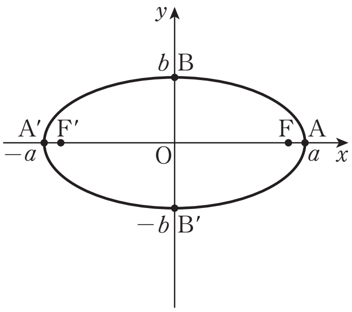
　直線 FF′ と楕円の交点を A，A′

　線分 FF′ の垂直二等分線と楕円の交点を B，B′

とすると

　線分 AA′ を「　　　」　線分 BB′ を「　　　」

という。また，4 点 A，A′，B，B′ を「頂点」という。



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ では，4 頂点は A$(a,\ 0)$，A$'(-a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，B$'(0,\ -b)$である。

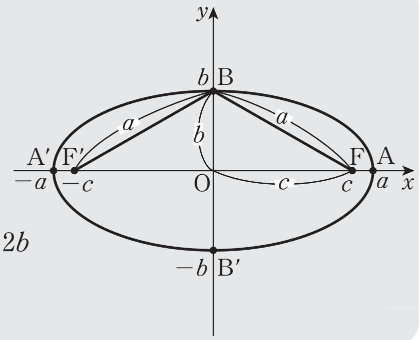
楕円の方程式

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$

・焦点は F$(c,\ 0)$，F$'(-c,\ 0)$　$(c=\sqrt{a^2-b^2})$

・中心は原点　　長軸の長さ $2a$　　短軸の長さ $2b$

・楕円は x 軸，y 軸，原点(中心)に関して対称



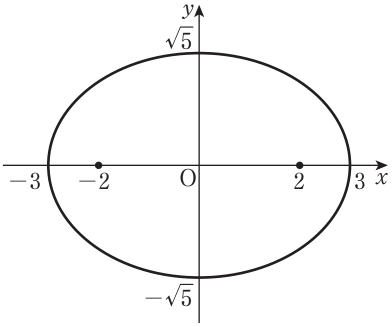
(ex) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

焦点は（　，0)，（　　，0)

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ より　長軸の長さは $2\cdot\quad=$

短軸の長さは $2\cdot\quad=$



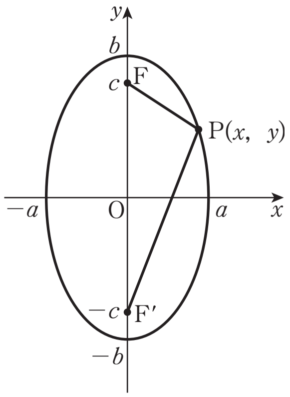
要点② 焦点が y 軸上にある楕円

$b>a>0$ のとき，2 点 F$(0,\ c)$，F$'(0,\ -c)$　$(c=\sqrt{b^2-a^2})$

を焦点とし，2 点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

である。



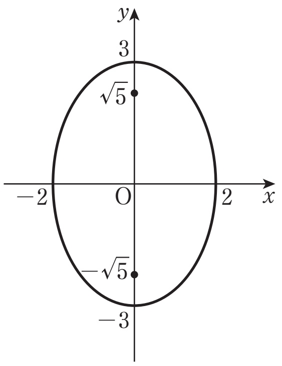
(ex) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

焦点は $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ より 長軸の長さは $2\cdot3=6$

短軸の長さは $2\cdot2=4$



2 (1) 次の楕円の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　(ii) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　(iii) $9x^2+25y^2=225$

(2) 次の楕円の方程式を求めよ。

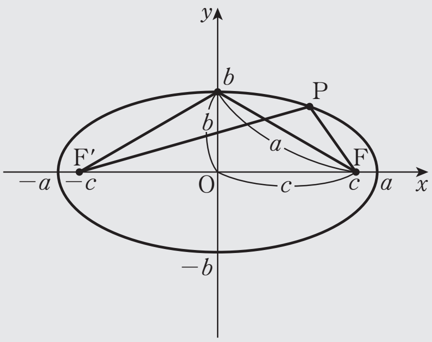
(i) 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ からの距離の和が 8

(ii) 2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ からの距離の和が 12

Point Pickup

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ のグラフ

$a>b$ のとき



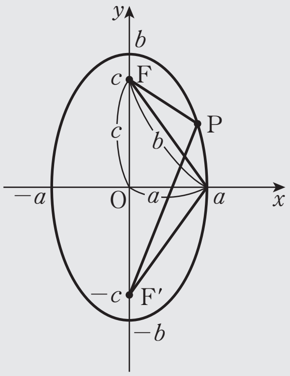
焦点は $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$

$c=$

長軸の長さは

短軸の長さは

$a<b$ のとき



焦点は $(0,\ c)$，$(0,\ -c)$

$c=$

長軸の長さは

短軸の長さは

第 1 講 PART2 確認問題

次の楕円の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

焦点 ア

① $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$　② $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$

③ $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$　④ $(0,\ \sqrt{7})$，$(0,\ -\sqrt{7})$

長軸，短軸の長さ イ

① 長軸 4，短軸 3　② 長軸 2，短軸 $\sqrt{3}$

③ 長軸 4，短軸 $2\sqrt{3}$　④ 長軸 8，短軸 6

2 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

焦点 ウ

① $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$　② $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$

③ $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$　④ $(0,\ \sqrt{7})$，$(0,\ -\sqrt{7})$

長軸，短軸の長さ エ

① 長軸 4，短軸 3　② 長軸 8，短軸 6

③ 長軸 16，短軸 9　④ 長軸 32，短軸 18

3 $4x^2+9y^2=36$

焦点 オ

① $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$　② $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$

③ $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$　④ $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

長軸，短軸の長さ カ

① 長軸 3，短軸 2　② 長軸 6，短軸 4

③ 長軸 9，短軸 4　④ 長軸 18，短軸 8

次の楕円の方程式を求めよ。

4 2 点 (1, 0), (−1, 0) からの距離の和が 6 である。

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{キ}}}+\frac{y^2}{\boxed{\text{ク}}}=1$$

5 2 点 (0, 2), (0, −2) からの距離の和が $2\sqrt{7}$ である。

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{ケ}}}+\frac{y^2}{\boxed{\text{コ}}}=1$$

[MEMO]

PART2 楕円

2 (1)　次の楕円の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求め，概形をかけ。

(i)　$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　(ii)　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　(iii)　$9x^2+25y^2=225$

(2)　次の楕円の方程式を求めよ。

(i)　2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ からの距離の和が 8

(ii)　2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ からの距離の和が 12

[解答]

(1)(i)　$\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$ より，焦点は $(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$

$\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ より，長軸の長さは $2\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$　短軸の長さは $2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

概形は下図(ア)

(ii)　$\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ より 焦点は $(0,\ 2\sqrt{5})$，$(0,\ -2\sqrt{5})$

$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$ より，長軸の長さは $2\cdot6=12$　短軸の長さは $2\cdot4=8$

概形は下図(イ)

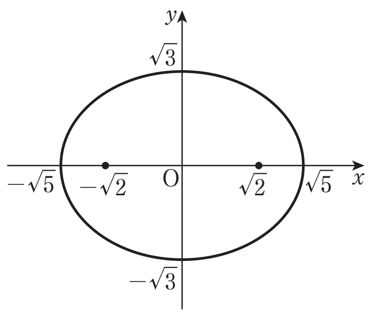
(iii)　$9x^2+25y^2=225$ より $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ より，焦点は $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$

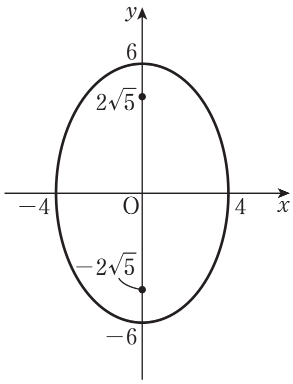
$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ より，長軸の長さは $2\cdot5=10$　　短軸の長さは $2\cdot3=6$

概形は下図(ウ)

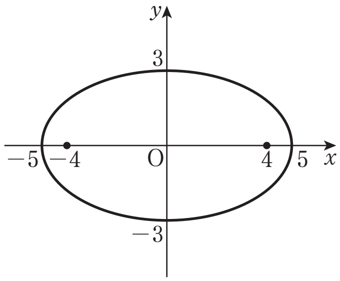
(ア)



(イ)



(ウ)



(2)(i)　焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)とおける。

焦点からの距離の和が 8 より，$2a=8$　　$a=4$

焦点の座標が (2，0) より，$\sqrt{a^2-b^2}=2$　　$16-b^2=4$　　$b^2=12$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

(ii)　焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($b>a>0$)とおける。

焦点からの距離の和が 12 より，$2b=12$　　$b=6$

焦点の座標が (0，5) より，$\sqrt{b^2-a^2}=5$　　$36-a^2=25$　　$a^2=11$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{11}+\dfrac{y^2}{36}=1$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：③

[解説]

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

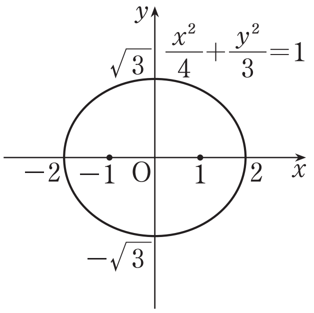
$\sqrt{4-3}=1$ より，焦点は，[A]

$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$

方程式は，$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ であるから，

長軸の長さは，$2\cdot 2=4$ [A]

短軸の長さは，$2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$



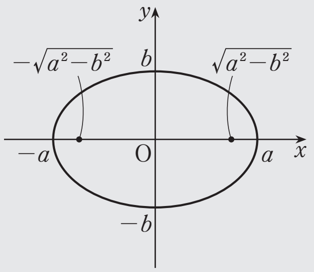
[A]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

において，

焦点：$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

長軸の長さ：$2a$

短軸の長さ：$2b$



2

[正解] ウ：④，エ：②

[解説]

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

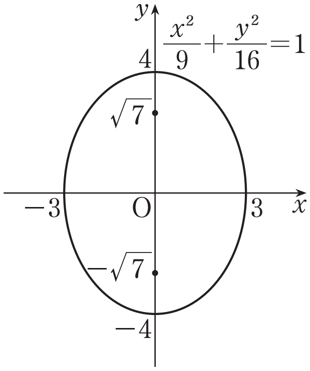
$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ より，焦点は，[B]

$$(0,\ \sqrt{7}),\ (0,\ -\sqrt{7})$$

方程式は，$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ であるから，

長軸の長さは，$2\cdot4=8$ [B]

短軸の長さは，$2\cdot3=6$



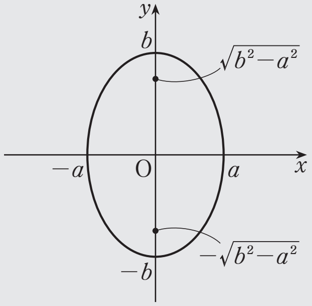
[B]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$

において，

焦点：$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

長軸の長さ：$2b$

短軸の長さ：$2a$



3 **[正解]** オ：③，カ：②

[解説]

$$4x^2+9y^2=36$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$ [C]

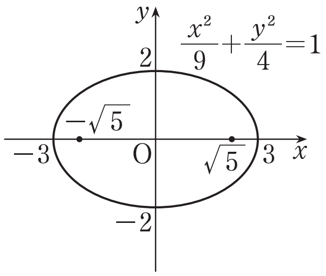
$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ より，焦点は， [D]

$$(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0)$$

方程式は，$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ であるから，

長軸の長さは，$2\cdot3=6$

短軸の長さは，$2\cdot2=4$



[C]　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の形に変形する。

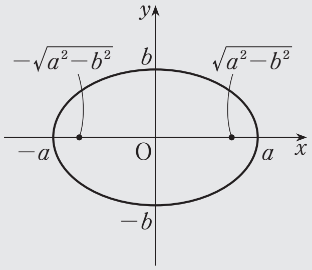
[D]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

において，

焦点：$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

長軸の長さ：$2a$

短軸の長さ：$2b$



4

[正解] キ：9，ク：8

[解説]

焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

とおける。

焦点からの距離の和が 6 であるから，[E]

$$2a=6$$

$$a=3$$

焦点の座標の 1 つが (1，0) であるから，

$$\sqrt{a^2-b^2}=1$$ [F]

$$9-b^2=1$$

$$b^2=8$$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1}$$

[E]　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は，$2a$

[F]　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の焦点は，
$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

5

[正解] ケ：3，コ：7

[解説]

焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b>a>0)$$

とおける。

焦点からの距離の和が $2\sqrt{7}$ であるから，[G]

$$2b=2\sqrt{7}$$

$$b=\sqrt{7}$$

焦点の座標の 1 つが (0，2) であるから，

$$\sqrt{b^2-a^2}=2$$ [H]

$$7-a^2=4$$

$$a^2=3$$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{7}=1}$$

[G]　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は，$2b$

[H]　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ の焦点は，
$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$